SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES

PAR P. BARBARIN [1]
Professeur honoraire de l'Université de Paris

---

ad

RÉSUMÉ

Sur un système d'équations simultanées. — L'auteur reprend l'étude du système d'équations simultanées qui, géométriquement, représente l'intersection de trois cylindres parallèles aux axes de coordonnées et ayant l'origine comme centre commun. Après avoir démontré que la recherche purement algébrique des valeurs de x, y et z ne dépend que d'une équation de 3e degré, il considère des cas particuliers qu'il intérprete, géométriquement, en géométrie euclidienne; puis il étend cette interprétation aux géométries non euclidiennes. Il fait voir que le problème de Malfatti, consistant à déterminer trois cercles deux à deux tangents, et dont chacun touche deux côtés d'un triangle, rentre dans un de ces cas particuliers. D'autres cas spéciaux sont également traités d'une manière peut-être nouvelle : un de ces cas admet une solution au moyen de coefficients indéterminés ou par l'usage de fonctions hyperboliques. Un des résultats est appliqué à une généralisation d'un théorème de Steiner.

Le système d'équations

$$
\begin{aligned}
y^2 + z^2 + 2myz &= a^2, \\
z^2 + x^2 + 2nzx &= b^2, \qquad (1) \\
x^2 + y^2 + 2pxy &= c^2,
\end{aligned}
$$

[1] Monsieur le professeur Barbarin, de Paris, a bien voulu remettre à notre Académie, à titre de bienvenue, la présente étude, dans lequelle il s'occupe d'une question, vieille si l'on veut, mais toujours intéressante, et a laquelle il a ajouté certains dévelloppements nouveaux et inattendus. L'Académie en a pris connaissance dans sa séance du 20 avril 1929, par l'intermédiaire de monsieur Dassen à qui il a été personnellement envoyé. L'Académie, très touchée de cette cordiale démonstration de sympathie, a resolu de signifier à monsieur Barbarin ses très sincères remerçiements, et de publier, sans délai, le travail dans ses *Annales*.

Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Tomo I (1928)

a été étudié par différents auteurs dans des cas particuliers; voir, par exemple, Desboves, *Questions d'algèbre élémentaire,* 1873, pages 291 et suivantes; 1878, pages 353 et suivantes; et Barbarin, *Revue de Mathématiques spéciales,* 1892, pages 317 et suivantes.

Il a évidemment pour origine des problèmes de géométrie dont on a été amené à généraliser la solution, soit dans l'espace euclidien, soit dans l'espace non euclidien, comme il sera facile de le voir.

Nous allons démontrer d'abord que la recherche purement algébrique des valeurs de x, y et z ne dépend que d'une équation du 3^e degré; puis nous examinerons quelques cas particuliers intéressants.

I. Méthode générale. — Posons

$$x = z\mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad y = z\mathrm{Y};$$

les équations (1) deviennent

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\mathrm{Y}^2 + 1 + 2m\mathrm{Y}}{a^2} = \frac{\mathrm{X}^2 + 1 + 2n\mathrm{X}}{b^2} = \frac{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + 2p\mathrm{XY}}{c^2}; \tag{2}$$

on est ainsi ramené au calcul de X et de Y, c'est à dire, à la résolution du système d'équations nouvelles

$$\begin{aligned} f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &= a^2\mathrm{X}^2 - b^2\mathrm{Y}^2 + 2na^2\mathrm{X} - 2mb^2\mathrm{Y} + a^2 - b^2 = 0 \\ f_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &= (a^2 - b^2 + c^2)\mathrm{X}^2 + 2p(a^2 - b^2)\mathrm{XY} + \\ &\quad + (a^2 - b^2 - c^2)\mathrm{Y}^2 + 2nc^2\mathrm{X} - 2mc^2\mathrm{Y} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Si nous ajoutons à la deuxième les termes de la première multipliés par λ, et si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{A} = a^2(1+\lambda) - b^2 + c^2, \qquad \mathrm{B} = p(a^2 - b^2), \qquad \mathrm{C} = a^2 - b^2(1+\lambda) - c^2,$$

$$\mathrm{D} = n(c^2 + a^2\lambda), \qquad \mathrm{E} = -m(c^2 + b^2\lambda), \qquad \mathrm{F} = (a^2 - b^2)\lambda,$$

pour la valeur réelle de λ, racine de l'équation du 3^e degré

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{E} \\ \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

l'équation

$$f_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \lambda f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$$

se ramène à la forme

$$(\alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} + \gamma)(\alpha'\mathrm{X} + \beta'\mathrm{Y} + \gamma') = 0.$$

Par conséquent on a, en définitive, X et Y en associant chacun de ces derniers facteurs linéaires égalé à zéro avec l'une des équations (3), par exemple la première qui est la plus simple. Cela donne quatre systèmes de valeurs pour X et Y, donc aussi quatre valeurs de z^2, en vertu des équations (2); il en résulte, par conséquent, huit systèmes de valeurs pour x, y et z, deux à deux opposés.

On peut remarquer que les équations (1) sont celles de trois cylindres parallèles aux axes de coordonnées et ayant l'origine comme centre commun; leurs huit points communs sont aussi deux à deux opposés.

II. Cas de $m = n = p = 0$. — La solution, tout élémentaire, est donnée par les formules

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

$$y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2},$$

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2},$$

que l'on retrouve aisément dans l'application de la méthode générale, car l'équation (4) admet ici la racine zéro, et l'équation (5) n'est autre que la suivante

$$\left[\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}\,X + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}\,Y\right]\left[\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}\,X - \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}\,Y\right] = 0.$$

On en déduit naturellement les valeurs

$$X^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + b^2 - c^2},$$

$$Y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2},$$

qui ramènent bien à celles de x^2, y^2 et z^2 écrites plus haut.

Ces valeurs sont réelles quand on a simultanément les inégalités

$$b^2 + c^2 \geqq a^2, \qquad c^2 + a^2 \geqq b^2, \qquad a^2 + b^2 \geqq c^2,$$

qui, a, b, c, étant positifs, entraînent que a, b, c peuvent mesurer les côtés d'un triangle qui n'a que des angles aigus. Relativement à ce triangle, la résolution du système proposé fait connaître, en géométrie euclidienne, les longueurs des arêtes du trièdre trirectangle OABC aboutissant à ses trois sommets. Dans ce cas, le point O est aussi le point commun à trois sphères ayant pour diamétres les trois côtés du triangle, et sa projection sur le plan ABC est, ainsi qu'on le sait, l'orthocentre du triangle, c'est à dire, le centre radical des circonférences de grand cercle situées sur le plan.

Or, il est très remarquable que cette dernière interprétation du système (1) peut s'appliquer aussi à la géométrie non euclidienne. Si, en effet, on considère trois sphères de l'espace riemannien ayant pour diamètres les côtés d'un triangle ABC et se coupant au point commun O, on a

$$\sin^2\frac{OB}{2}+\sin^2\frac{OC}{2}=\sin^2\frac{BC}{2},$$

par conséquent a, b et c représentant les sinus des demi-côtés du triangle, tandis que x, y et z sont ceux des demi-distances du point O à ses sommets. La projection de O sur le plan ABC se trouve, dans ce cas, non pas à l'orthocentre, mais au point de recontre des trois perpendiculaires menées de chacun des sommets du triangle sur la droite joignant les milieux des deux côtés aboutissant à ce sommet; on voit, du reste, que cette perpendiculaire est identique à l'axe radical de deux des circonférences du grand cercle.

S'il s'agissait de l'espace de Lobatchefsky-Bolyai, il n'y aurait qu'à remplacer, dans ce qui précède, les sinus circulaires par les sinus hyperboliques.

III. Cas de $m=\cos\alpha$, $n=\cos\beta$, $p=\cos\gamma$. — L'équation

$$y^2+z^2+2myz=a^2$$

exprime, en géometrie euclidienne, que y et z sont les côtés d'un triangle enfermant l'angle $\pi-\alpha$, et où le troisième côté est égal à a. Or, nous allons voir qu'en géométrie générale, quelque chose de semblable peut être formulé. Soit, en effet, le triangle ABC où l'angle BAC égale $\pi-\alpha$; le rayon ωA du cercle circonscrit détermine les deux angles

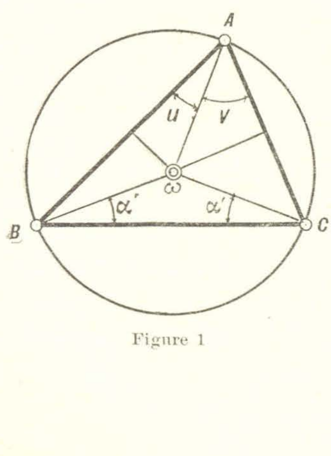

Figure 1

$$BA\omega=u,\qquad \omega AC=v \text{ (fig. 1)}$$

tels que

$$u+v=\pi-\alpha.$$

Mais on a

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 u + \cos^2 v + 2 \cos \alpha \cos u \cos v,$$

avec (en géométrie riemannienne, par exemple)

$$\operatorname{tg} \frac{AB}{2} = \operatorname{tg} \omega A \cos u, \qquad \operatorname{tg} \frac{AC}{2} = \operatorname{tg} \omega A \cos v;$$

donc si l'on pose

$$\operatorname{tg} \frac{AB}{2} = y, \qquad \operatorname{tg} \frac{AC}{2} = z,$$

il vient

$$y^2 + z^2 + 2yz \cos \alpha = \operatorname{tg}^2 \omega A \,.\, \sin^2 \alpha.$$

D'ailleurs, appelons α' l'angle ωBC égal à ωCB; comme

$$\operatorname{tg} \frac{BC}{2} = \operatorname{tg} \omega A \cos \alpha',$$

il vient finalement

$$y^2 + z^2 + 2yz \cos \alpha = \operatorname{tg}^2 \frac{BC}{2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha'},$$

et l'on peut désigner le second membre par a^2.

Le système des équations (1) est, par conséquent, susceptible, dans toute forme d'espace, d'interprétations géométriques analogues. Mais pour des valeurs quelconques de α, β et γ, c'est à dire, de m, n et p, sa résolution ne relève que de la méthode générale expliquée au § I.

Nous allons exposer des cas où elle se simplifie beaucoup.

IV. Cas où $\dfrac{a^2}{1-m^2} = \dfrac{b^2}{1-n^2} = \dfrac{c^2}{1-p^2} = \lambda^2 \varepsilon$, ε désignant ± 1.

— 1° Envisageons d'abord l'hypothèse $\varepsilon = 1$. Les nombres m, n et p de valeur absolue inférieure à 1, peuvent être pris, respectivement, pour cosinus de trois angles aigus ou obtus α, β et γ. Il en résulte

$$\lambda^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3 - (m^2 + n^2 + p^2)},$$

et

$$a = \lambda \sin \alpha, \qquad b = \lambda \sin \beta, \qquad c = \lambda \sin \gamma.$$

Les équations (1) peuvent alors se résoudre par

$$x = \lambda \cos X, \qquad y = \lambda \cos Y, \qquad z = \lambda \cos Z,$$

moyennant

$$Y+Z+\alpha=\pi, \qquad \text{ou} \qquad X=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2},$$

$$Z+X+\beta=\pi, \qquad \text{ou} \qquad Y=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2},$$

$$X+Y+\gamma=\pi, \qquad \text{ou} \qquad Z=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

D'où les résultats

$$x=\lambda\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}, \qquad y=\lambda\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}, \qquad z=\lambda\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

2° Soit maintenant $\varepsilon=-1$; m, n et p sont, en valeur absolue, supérieurs à 1, avec des signes variables.

Quand m, n et p sont positifs, on détermine trois arguments hyperboliques par les équations

$$m=\operatorname{ch}\alpha, \qquad n=\operatorname{ch}\beta, \qquad p=\operatorname{ch}\gamma,$$

d'où

$$a=\lambda\operatorname{sh}\alpha, \qquad b=\lambda\operatorname{sh}\beta, \qquad c=\lambda\operatorname{sh}\gamma,$$

avec

$$\lambda^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{m^2+n^2+p^2-3}.$$

En ce cas,

$$x=\lambda\operatorname{sh}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}, \qquad y=\lambda\operatorname{sh}\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}, \qquad z=\lambda\operatorname{sh}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2},$$

donnent encore une solution du système (1). Les autres combinaisons de signe de m, n et p se traiteront de façon analogue.

V. Problème de Malfatti. — Le problème de Malfatti rentre dans le 1° du § IV lorsque α, β et γ sont les angles d'une certaine direction de l'espace avec trois axes rectangulaires; on a alors

$$m^2+n^2+p^2=1, \qquad \lambda^3=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Ce problème consiste, comme l'on sait, à déterminer trois cercles deux à deux tangents et dont chacun touche deux côtés du triangle donné ABC. Soient a', b' et c' les côtés et A, B, C les angles de ce triangle. Supposons que les cercles inconnus aient pour rayons respectifs r_a, r_b et r_c. On a évidemment sur la figure aisée à construire

$$r_b \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + 2\sqrt{r_b r_c} + r_c \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = a',$$

et deux équations de même forme. En posant

$$r_a \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = x^2, \qquad r_b \operatorname{cotg} \frac{B}{2} = y^2, \qquad r_c \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = z^2,$$

$$m = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}, \qquad n = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}}, \qquad p = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}},$$

et remplaçant a', b' et c' par a^2, b^2 et c^2, c'est précisément le système (1) qu'il faut résoudre dans les conditions précitées; on a alors, $2L$ étant le périmètre du triangle,

$$r_a = L \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin^2 \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2},$$

$$r_b = L \operatorname{tg} \frac{B}{2} \sin^2 \frac{\gamma + \alpha - \beta}{2},$$

$$r_c = L \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin^2 \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}.$$

Desboves donne explicitement les valeurs des inconnues x, y et z en fonction des coefficients du système (1) (*Questions d'algèbre*, page 361), par exemple,

$$x^2 = \frac{(1 - mnp)(a^2 + b^2 + c^2) + 2(pbc - mab - nac)}{4},$$

mais il est extrêmement remarquable que cet auteur, qui cependant mentionne dans ses *Questions de géométrie*, 1875, pages 363 et suivantes, la construction du problème de Malfatti donnée par Hart (*Quaterly Journal*, tome I, page 219), d'après Mannheim et Steiner, ne fasse aucune allusion au rapprochement signalé plus haut entre ce problème et la résolution du système (1).

VI. Cas ou $m = n = p$. — Posons $a^2 + b^2 + c^2 = 2d^2$, et prenons comme premières inconnues auxiliaires

$$x + y + z = u, \qquad zy + yz + zx = v,$$

les équations (1) se transforment en

$$
\begin{aligned}
u(y+z)+(2m-1)yz &= a^2+v,\\
u(z+x)+(2m-1)zx &= b^2+v, \qquad (1')\\
u(x+y)+(2m-1)xy &= c^2+v,
\end{aligned}
$$

avec

$$u^2+(m-2)v=d^2.$$

Supposons d'abord $m \neq 2$. Posons, pour abréger, $2m-1$ étant inégal à zéro,

$$d^2+(m+1)v=(2m-1)t$$

il en résulte, si $m+1$ est aussi $\neq 0$,

$$
\begin{aligned}
u^2 &= \frac{2m-1}{m+1}\left[d^2+(2-m)t\right],\\
v &= \frac{(2m-1)t-d^2}{m+1}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Ceci posé, éliminant z entre les deux premières équations (1'), on a

$$ua^2+(2m-1)(a^2+t)x=ub^2+(2m-1)(b^2+t)y;$$

désignons donc la valeur commune des deux membres par w; par raison de symétrie, x, y et z sont exprimés en fonction de w et de t par les formules

$$x=\frac{w-a^2u}{(2m-1)(a^2+t)}, \qquad y=\frac{w-b^2u}{(2m-1)(b^2+t)},$$

$$z=\frac{w-c^2u}{(2m-1)(c^2+t)}.$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer w en fonction de t, et à calculer cette dernière variable pour que le probléme soit entièrement résolu. Pour cela, désignons por $\sum$ en abrégé la somme $\sum \frac{1}{a^2+t}$, et portons les valeurs de x, y et z précédentes dans u, nous en déduisons

$$w=u\left[\frac{2(m+1)}{\sum}=t\right], \qquad (7)$$

ce qui donne les valeurs nouvelles de x, y et z

$$x=\frac{u}{2m-1}\left[\frac{2(m+1)}{(a^2+t)\sum}-1\right], \qquad (8)$$

Substituons les, finalement, dans une des équations (1′) pour obtenir l'équation cherchée

$$f(t) = (a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)\sum{}^2 - 4(m + 1)[d^2 + (2 - m)t] = 0. \quad (9)$$

Chaque racine de cette équation du quatrième degré en t donne deux valeurs opposées pour u, x, y et z.

Il faut maintenant revenir sur les valeurs numériques de m mises de côté au début de ce paragraphe.

Quand $m = -1$, les équations (1), par extraction de racines carrées, se ramènent au premier degré; leur système est impossible ou indéterminé selon que $a + b + c$ est différent de zéro ou nul.

Lorsque $m = 2$, on a, simplement, $u = \pm d$, et le calcul s'achève comme plus haut.

Enfin lorsque $m = \frac{1}{2}$, on tire facilement des équations (1′)

$$2ux = b^2 + c^2 - a^2 + v,$$

qui multipliées deux à deux, et ajoutées par produits, donnent

$$4u^2v = 3v^2 + 4d^2v + 16T^2, \quad (10)$$

en posant

$$\sum (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) = 16T^2. \quad (10')$$

On en déduit aisément

$$v^2 = \frac{16T^2}{3},$$

exigeant que T^2 soit positif, c'est à dire, que a, b et c soient les côtés d'un triangle d'aire égale à T; ensuite on a

$$u^2 = d^2 \pm 2T\sqrt{3}$$

d'où finalement x, y et z. (Voir Bardey, *Equations de 2e degré,* et Desboves, ouvrage cité, page 354.)

EMPLOI DE COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

VII. Premier cas particulier. – Multiplions les équations (1) par les fractions indéterminées

$$\mu = \frac{N^2 + P^2 - M^2}{2NPM}, \qquad \nu = \frac{P^2 + M^2 - N^2}{2PMN}, \qquad \rho = \frac{M^2 + N^2 - P^2}{2MNP},$$

et ajoutons les produits, cela donne

$$\frac{1}{\text{MNP}}(\text{M}x + \text{N}y + \text{P}z)^2 + 2\sum\left(m\mu - \frac{1}{\text{M}}\right)yz = \mu a^2 + \nu b^2 + \rho c^2. \quad (11)$$

Cherchons à déterminer M, N et P de façon à avoir à la fois

$$m\mu - \frac{1}{\text{M}} = 0, \qquad n\nu - \frac{1}{\text{N}} = 0, \qquad p\rho - \frac{1}{\text{P}} = 0.$$

Cela est possible d'une infinité de manières quand m, n et p, de valeur absolue plus grande que 1, vérifient la relation générale

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{mnp} = 1. \qquad (11\ bis)$$

Alors les angles A, B, C, déterminés par

$$\cos \text{A} = \frac{1}{m}, \qquad \cos \text{B} = \frac{1}{n}, \qquad \cos \text{C} = \frac{1}{p},$$

ont pour somme $(2i + 1)\pi$, et on a

$$\text{M} = \text{K} \sin \text{A}, \qquad \text{N} = \text{K} \sin \text{B}, \qquad \text{P} = \text{K} \sin \text{C},$$

$$\mu = \frac{1}{\text{K}} \operatorname{cotg} \text{A}, \qquad \nu = \frac{1}{\text{K}} \operatorname{cotg} \text{B}, \qquad \rho = \frac{1}{\text{K}} \operatorname{cotg} \text{C},$$

K étant arbitraire. L'équation (11) devient alors

$$(x \sin \text{A} + y \sin \text{B} + z \sin \text{C})^2 =$$
$$= \sin \text{A} \sin \text{B} \sin \text{C}\,(a^2 \operatorname{cotg} \text{A} + b^2 \operatorname{cotg} \text{B} + c^2 \operatorname{cotg} \text{C}),$$

et se ramène à la forme

$$x \sin \text{A} + y \sin \text{B} + z \sin \text{C} = \pm \text{H}.$$

L'élimination de z entre cette dernière et l'une des équations (1) amène finalement à résoudre deux équations du second degré en x et y. Les huit points communs aux trois cylindres que représentent les équations (1) sont alors placés quatre par quatre dans deux plans parallèles équidistants de l'origine et qui se confondent pour $\text{H} = 0$.

VIII. Deuxième cas particulier. — Admettons que m, n et p soient, en valeur absolue, moindres que 1, et par conséquent égaux aux cosinus de trois angles inférieurs à 2π, soient A, B et C.

Des équations (1) déduisons, par un calcul convenable, l'équation

$$\sqrt{a^2 - 2(m+1)yz} \pm \sqrt{b^2 - 2(n+1)zx} \pm \sqrt{c^2 - 2(p+1)xy} = 0,$$

dans laquelle, après avoir fait disparaître les radicaux, on pose

$$a + b + c = 2s,$$

ce qui donne l'équation nouvelle

$$(yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C)^2 + 2xyz(M'x + N'y + P'z) = \\ = 4s(s-a)(s-b)(s-c), \quad (12)$$

M', N' et P' ayant des valeurs évidentes.

Cherchons à déterminer M, N et P de l'équation (11) de façon à avoir à la fois

$$m\mu - \frac{1}{M} = -\sin A, \qquad n\nu - \frac{1}{N} = -\sin B, \qquad p\rho - \frac{1}{P} = -\sin C,$$

et

$$M' = KM, \qquad N' = KN, \qquad P' = KP.$$

On reconnaîtra que ceci peut avoir lieu d'une infinité de manières quand

$$m^2 + n^2 + p^2 + 2mnp = 1, \qquad (11\ ter)$$

c'est à dire quand

$$A + B + C = (2i + 1)\pi,$$

en faisant

$$M = \sin A, \qquad N = \sin B, \qquad P = \sin C$$

$$\mu = \operatorname{cotg} A, \qquad \nu = \operatorname{cotg} B, \qquad \rho = \operatorname{cotg} C;$$

il en résulte $M' = N' = P' = 0$. Par conséquent, si nous prenons pour inconnues auxiliaires les expressions

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = u,$$

$$yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C = v,$$

les équations (11) et (12) deviennent, respectivement

$$\frac{u^2}{\sin A \sin B \sin C} - 2v = a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C. \quad (11')$$

$$v^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad (12')$$

et font connaître les valeurs de v et u. La valeur de v est réelle quand a, b et c sont les côtés d'un triangle, et si T est la mesure de son aire,

$$v = \pm 2T,$$

et à chaque valeur de v répondent deux valeurs de u aussi réelles, car
$$u^2 = \sin A \sin B \sin C\,[a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C \pm 4T].$$

Il reste à calculer x, y et z en fonction de u et v. Eliminons x entre les formules définissant u et v, nous avons

$$a^2 \sin B \sin C + v \sin A = u\,(z \sin B + y \sin C),$$

ainsi que deux équations analogues obtenues par y et z; si, enfin, on résout ces dernières, on parvient à

$$\begin{aligned} 2ux &= (b^2 + c^2 - a^2) \sin A + 2v \cos A, \\ 2uy &= (c^2 + a^2 - b^2) \sin B + 2v \cos B, \\ 2uz &= (a^2 + c^2 - b^2) \sin C + 2v \cos C, \end{aligned} \tag{13}$$

qui conduisent au résultat désiré.

Nous allons les transformer d'une façon remarquable. Appelons pour cela A′, B′ et C′ les angles du triangle T. Dans l'hypothèse $A + B + C = \pi$, répondant à $i = 0$, on a

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A' \qquad \text{et} \qquad v = \pm\, bc \sin A',$$

donc

$$ux = bc \sin(A \pm A'),$$

et, par suite,

$$x = \frac{bc}{u} \sin(A \pm A'), \qquad y = \frac{ca}{u} \sin(B \pm B'), \qquad z = \frac{ab}{u} \sin(C \pm C'). \tag{14}$$

Si on supposait au contraire $i = 1$, A, B et C seraient chacun augmentés de π, ce qui fait que x, y et z n'auraient que changé de signe.

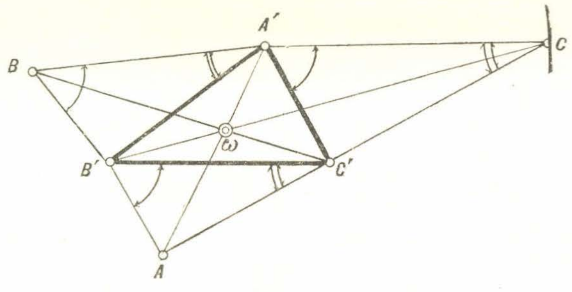

Figure 2

Les formules (14) se traduisent par l'intéressante construction géométrique que voici (fig. 2 et 3).

Sur les côtés du triangle A′B′C′ ou T, construisons des triangles

AB′C′, BC′A′, CA′B′ directement semblables entre eux et tels que les angles B′AC′, C′BA′ et A′CB′ soient, respectivement, égaux à A, B et C. Il y a deux façons de faire, le dessin suivant que ces triangles sont tournes vers l'extérieur de T; mais, dans les deux cas, les lignes AA′, BB′ et CC′ convergent au même point ω, qui est aussi le point commun à trois segments capables de π — A, π — B et π — C ou de A, B et π — C décrits sur a, b et c, respectivement. Alors ωA′, ωB′ et ωC′ sont, respectivement, x, y et z.

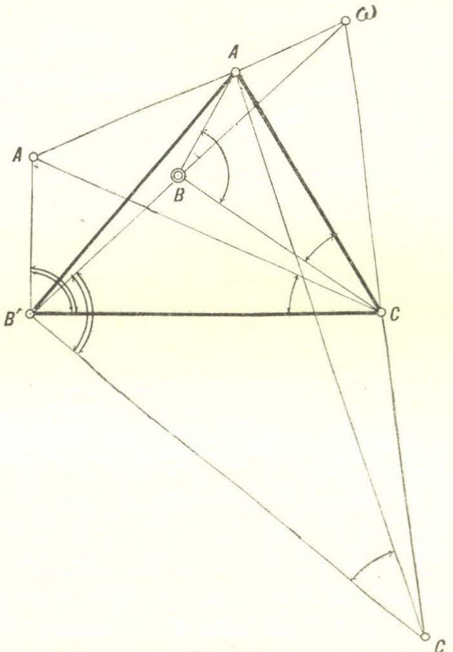

Figure 3

Les similitudes de triangles dans la figure (2) donnent en effet

$$\frac{\omega \mathrm{A}'}{bc \sin(\mathrm{A}+\mathrm{A}')} = \frac{\omega \mathrm{B}'}{ca \sin(\mathrm{B}+\mathrm{B}')} = \frac{\omega \mathrm{C}'}{ab \sin(\mathrm{C}+\mathrm{C}')},$$

puis

$$\mathrm{AA}' \sin \mathrm{A} = \mathrm{BB}' \sin \mathrm{B} = \mathrm{CC}' \sin \mathrm{C} = \omega \mathrm{A}' \sin \mathrm{A} + \omega \mathrm{B}' \sin \mathrm{B} + \omega \mathrm{C}' \sin \mathrm{C}.$$

Soit u la valeur de cette expression; la valeur commune de trois rapports est

$$\frac{u}{\sum bc \sin(\mathrm{A}+\mathrm{A}') \sin \mathrm{A}},$$

et comme

$$c \sin(A + A') = BB' \sin A'C'\omega = \frac{u \sin A'C'\omega}{\sin B} = u\frac{\omega A'}{b},$$

$\frac{1}{u}$ est aussi la valeur commune des mêmes rapports.

Enfin, le triangle AA'B' donne

$$\overline{AA'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'A}^2 - 2AB' \times B'A' \cos(B + B')$$

$$= \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin^2 A}[a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C + 4T] = \frac{u^2}{\sin^2 A},$$

les valeurs de u, x, y et z résultant de la figure sont conformes à celles du calcul. Le même rapprochement sera fait sur la figure 3. Si l'on pose

$$\frac{u}{\sin A \sin B \sin C} = 2R,$$

on sait que R est la rayon du cercle circonscrit au triangle maximum ayant A, B et C pour angles, et dont les côtés passent par A', B' et C'. Le raisonnement fait voir aisément que les côtés de ce triangle maximum sont perpendiculaires à $\omega A'$, $\omega B'$ et $\omega C'$, fait confirmé par le calcul.

L'exemple du paragraphe VI : $m = n = p = \frac{1}{2}$ rentre dans les calculs précédents, car $A = B = C = \frac{\pi}{3}$, et les triangles semblables construits sur a, b et c sont équilatéraux.

IX. Généralisation d'un théorème de Steiner. — *Si d'un point* M *pris dans le plan d'un triangle* ABC *on mène des obliques inclinées de l'angle* θ *et dans le même sens, limitées aux côtés de ce triangle en* A', B' *et* C', *l'aire du triangle* A'B'C' *est proportionnelle à la puissance du point* M *par rapport au cercle circonscrit à* ABC.

Soit R le rayon du cercle, T l'aire du triangle A'B'C'; on a, d'après les calculs du paragraphe VIII

$$R^2 = \frac{\sin^2\theta}{4 \sin A \sin B \sin C}\left[\sum \overline{B'C'}^2 \operatorname{cotg} A \pm 4T\right]$$

mais O étant le centre du cercle,

$$\overline{B'C'}^2 \operatorname{cotg} A = \frac{\overline{MA}^2 \sin 2A}{2\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{\left(R^2 + \overline{OM}^2\right)\sin 2A}{2\sin^2\theta} - \frac{2R \cdot \overline{OM} \sin 2A \cos AOM}{2\sin^2\theta},$$

et comme $\sum \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$,

$$\sum \sin 2A \cos AOM = 0,$$

on en déduit l'égalité

$$T = \pm \frac{\sin A \sin B \sin C}{2 \sin^2 \theta}\left(R^2 - \overline{OM}^2\right)$$

qui prouve le théorème énoncé. Quand $T =$ constante, la point M décrit un cercle concentrique à O. Lorsque $I = O$, on a $OM = R$ et on retrouve le théorème de Simson.

X. Emploi des fonctions hyperboliques. — Les relations (11 *bis*) et (11 *ter*) du paragraphe VII peuvent admettre d'autres solutions que celles qui ont été précédemment indiquées.

En effet, avec des nombres m, n, p de valeur absolue plus petite que 1, la relation (11 *bis*) est vérifiée par

$$\frac{1}{m} = -\operatorname{ch} A, \qquad \frac{1}{n} = -\operatorname{ch} B, \qquad \frac{1}{p} = -\operatorname{ch} C,$$

si A, B et C sont trois arguments hyperboliques de somme nulle. Il en résulte alors

$$M = K \operatorname{sh} A, \qquad N = K \operatorname{sh} B, \qquad P = K \operatorname{sh} C,$$

$$\mu = -\frac{1}{K \operatorname{th} A}, \qquad \nu = -\frac{1}{K \operatorname{th} B}, \qquad \rho = -\frac{1}{K \operatorname{th} C},$$

K étant arbitraire.

De ce fait, l'équation (11) prend la forme

$$(x \operatorname{sh} A + y \operatorname{sh} B + z \operatorname{sh} C)^2 = -\operatorname{sh} A \operatorname{sh} B \operatorname{sh} C \left(\frac{a^2}{\operatorname{th} A} + \frac{b^2}{\operatorname{th} B} + \frac{c^2}{\operatorname{th} C}\right)$$

et on en tire

$$x \operatorname{sh} A + y \operatorname{sh} B + z \operatorname{sh} C = \pm H$$

pour achever les calculs comme dans le paragraphe VII.

Pour la relation (11 *ter*) où m, n et p sont de valeur absolue plus grande que 1, il faut prendre $A + B + C = 0$, et

$$m = -\operatorname{ch} A, \qquad n = -\operatorname{ch} B, \qquad p = -\operatorname{ch} C,$$

$$M = \operatorname{sh} A, \qquad N = \operatorname{sh} B, \qquad P = \operatorname{sh} C,$$

$$\mu = -\frac{1}{\operatorname{th} A}, \qquad \nu = -\frac{1}{\operatorname{th} B}, \qquad \rho = -\frac{1}{\operatorname{th} C}.$$

L'équation (12) devient alors, M', N' et P' étant nuls,

$$(yz \operatorname{sh} A + zx \operatorname{sh} B + xy \operatorname{sh} C)^2 = -4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Par suite, si l'on prend encore deux inconnues auxiliaires convenables u et v analogues à celles du paragraphe VIII, on a, pour les calculer, les équations

$$\frac{u^2}{\operatorname{sh} A \operatorname{sh} B \operatorname{sh} C} + 2v = -\left(\frac{a^2}{\operatorname{th} A} + \frac{b^2}{\operatorname{th} B} + \frac{c^2}{\operatorname{th} C}\right)$$

$$v^2 = -4s(s-a)(s-b)(s-c)$$

v n'est alors réel que quand, des trois nombres positifs a, b, c, un est supérieur à la somme des deux autres; mais on peut choisin A, B et C, qui ne sont pas de même signe, en sorte que la valeur de u^2 soit positive; donc u est réel.

Si l'on reprend les calculs du paragraphe VIII on trouve, pour déterminer x, y et z les formules (13) où sh A, sh B et sh C remplacent sin A, sin B et sin C, tandis que cos A, cos B et cos C sont remplacés par — ch A, — ch B et ch C.

Or, dans l'hypothèse $a > b + c$, on sait calculer trois arguments hyperboliques A', B' et C' par les équations

$$b^2 + c^2 - a^2 = -2bc \operatorname{ch} A',$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \operatorname{ch} B',$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \operatorname{ch} C';$$

d'où

$$v = \pm bc \operatorname{sh} A' = \pm ac \operatorname{sh} B' = \pm ab \operatorname{sh} C',$$

et il en résulte

$$x = -\frac{bc}{u} \operatorname{sh}(A \pm A'), \qquad y = \frac{ac}{u} \operatorname{sh}(B \mp B'), \qquad z = \frac{ab}{u} \operatorname{sh}(C \mp C'),$$

les signes supérieurs étant pris ensemble de même que les signes inférieurs.